প্রথম অধ্যায়

সেট ও ফাংশন

SET AND FUNCTION

প্রাথমিক আলোচনা

শিক্ষার্থীদের সুবিধার জন্য মাধ্যমিক পর্যায়ে অধ্যয়নকৃত সেট সম্পর্কিত কতকগুলি প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা এবং সূত্র এখানে পর্যালোচনা করা হলো।

সেট ঃ সেট হচ্ছে সুনির্দিষ্টভাবে সংজ্ঞায়িত বস্তুসমূহের সমাহার বা তালিকা। সেটে অন্তর্ভুক্ত বস্তুসমূহ সংখ্যা, বর্ণমালার বর্ণ, মানুষ, নদী ইত্যাদি যে কোনো মূর্ত বা বিমূর্ত বস্তু হতে পারে। যে সমস্ত বস্তু নিয়ে সেট গঠিত হয় সেগুলিকে সেটের উপাদান বলা হয়।

বর্ণমালার বড় হাতের বর্ণ (capital letters) দ্বারা সাধারণত সেট এবং ছোট হাতের বর্ণ (small letters) দ্বারা সেটের উপাদান নির্দেশ করা হয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় যে, যদি A সেটের উপাদানগুলি b, f, g, h হয় তবে $A = \{b, f, g, h\}$. লক্ষণীয় যে, উপাদানগুলির একটিকে আর একটি থেকে " , " কমার দ্বারা পৃথক করা হয়েছে এবং সবগুলি উপাদান { } ব্র্যাকেটের মধ্যে সন্নিবিষ্ট করা হয়েছে। সেট লেখার এ পদ্ধতিকে তালিকা পদ্ধতি (Tabular form) বলে।

$B = \{3, 5, 9, 10\}$ তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশিত 3, 5, 9, 10 এই চারটি উপাদানের একটি সেট।

যদি সেটের উপাদানগুলি এক বা একাধিক নিয়ম অনুযায়ী গৃহীত হয় তবে সেট লিপিবদ্ধ করার যে পদ্ধতি সাধারণত ব্যবহার করা হয় তাকে সেট গঠনকারী পদ্ধতি (set builder form of the set) বলে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় যে, যদি B সমস্ত বিজোড় সংখ্যার সেট হয় তবে আমরা লিখি $B = \{x : x$ বিজোড়$\}$। এটিকে পড়া হয় "B হচ্ছে উপাদান x-এর সেট যেন x বিজোড় হয়।" " ঃ " প্রতীকটি যেন এর পরিবর্তে ব্যবহার করা হয়েছে। x, কোনো সেট A-এর উপাদান হলে সংকেতে এটিকে প্রকাশ করা হয় $x \in A$; এটিকে পড়া হয় x, A সেটের একটি উপাদান। $A = \{a, e, i, o, u\}$ হলে, $a \in A, i \in A$ কিন্তু $d \notin A$; শেষোক্ত সংকেতটি নির্দেশ করে যে d, A সেটের উপাদান নয়।

সেটের সমতা ঃ A এবং B সেট দুইটি সমান হবে যদি A সেটের সবগুলি উপাদান B সেটের উপাদান হয় এবং B সেটের সবগুলি উপাদান A সেটের উপাদান হয় ; তখন লেখা হয় $A = B$.

উদাহরণ 1. $A = \{a, b, c, d\}$ এবং $B = \{c, a, d, b\}$ দুইটি সেট। 'A সেটের উপাদান a, b, c, d সবগুলিই B সেটেরও উপাদান আবার B সেটের উপাদান c, a, d, b সবগুলিই A সেটেরও উপাদান।' সুতরাং, A এবং B সেট দুইটি সমান। স্পষ্টতই, সেটে অন্তর্ভুক্ত উপাদানসমূহের পুনর্বিন্যাসের ফলে সেটের কোনো পরিবর্তন হয় না।

উদাহরণ 2. $C = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $D = \{2, 3\}$ এবং $F = \{2, 3, 3, 2\}$ তিনটি সেট। এখানে, $C = D = F$; লক্ষণীয় যে, কোনো উপাদান অথবা উপাদানসমূহের পুনরাবৃত্তির ফলে সেটের কোনো পরিবর্তন হয় না।

শূন্য বা ফাঁকা সেট ঃ সেটে কোনো উপাদান না থাকলে অর্থাৎ উপাদানবিহীন সেটকে খালি সেট বা শূন্য সেট (Empty set) বলে। শূন্য সেট বা খালি সেট $\varnothing$ সংকেত দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$B = \{x : x^2 = 9, x$ জোড়$\}$ একটি খালি সেট।

উপসেট ঃ যদি A সেটের প্রতিটি উপাদান B সেটেরও উপাদান হয় তবে A-কে B সেটের উপসেট (subset) বলা হয়। এ শর্তকে $x \in A \Rightarrow x \in B$ লিখে প্রকাশ করা হয়; অর্থাৎ $x \in A$ হলে অবশ্যই $x \in B$ হতে হবে। A ও B সেট দুইটির এ সম্পর্ক $A \subseteq B$ লিখে প্রকাশ করা হয়। তখন B সেটকে A সেটের অধিসেট (superset) বলা হয় এবং $B \supseteq A$ লিখে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং $B \supseteq A$ এবং $A \subseteq B$ সমার্থক উক্তি; একে $B \supseteq A \Leftrightarrow A \subseteq B$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ 1. $C = \{1, 3, 5\}$ সেটটি $D = \{5, 6, 3, 9, 1\}$ সেটের একটি উপসেট।

উদাহরণ 2. $A = \{2, 5, 9\}$ সেটটি $B = \{5, 9, 2\}$ সেটের একটি উপসেট। উপরন্তু $A = B$.

দ্রষ্টব্য ঃ ১. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$.

২. প্রত্যেক সেট নিজেই নিজের উপসেট এবং শূন্য সেট প্রত্যেক সেটের উপসেট (কেননা এর অন্যথা প্রমাণ করা যায় না)।

৩. $A \not\subseteq B \Rightarrow$ A সেটে কমপক্ষে একটি উপাদান থাকবে যা B সেটের উপাদান নয়।

৪. A সেটকে B-এর প্রকৃত উপসেট (proper subset) বলা হয় তখন (i) $A \subseteq B$ এবং (ii) $A \neq B$. উদাহরণ 1-এ বর্ণিত C সেটটি D-এর প্রকৃত উপসেট কেননা $C \subseteq D$ এবং $C \neq D$.

শক্তি সেট ঃ কোনো সেটের উপসেটসমূহের সেটকে ঐ সেটের শক্তি সেট (power set) বলে। যদি A কোনো সেট হয় তবে A-এর শক্তি সেটকে 2^A সংকেত দ্বারা প্রকাশ করা হয়। A যদি সান্ত সেট এবং এর উপাদান সংখ্যা n হয়, তবে দেখান যায় যে, A-এর শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা 2^n হবে।

উদাহরণ 1. $A = \{b, c\}$ হলে, $2^A = \{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$.

উদাহরণ 2. $B = \{2, 4, 6\}$ হলে, $2^B = \{\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{4, 6\}, \{2, 6\}, \{2, 4, 6\}\}$.

নিশ্ছেদ সেট ঃ দুইটি সেটের কোনো সাধারণ উপাদান না থাকলে সেট দুইটিকে পরস্পর নিশ্ছেদ সেট (disjoint sets) বলে।

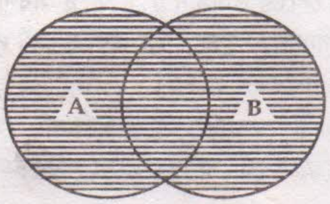
$A = \{1, 3, 7, 8\}, B = \{2, 4, 7, 9\}$ সেট দুইটি নিশ্ছেদ নয় কেননা, $7 \in A$ এবং $7 \in B$.

$E = \{x, y, z\}, F = \{a, b, c\}$ সেট দুইটি নিশ্ছেদ।

দ্রষ্টব্য ঃ 'নিশ্ছেদ সেট' কথাটি শুধুমাত্র দুইটি প্রদত্ত সেটের প্রেক্ষিতে প্রযোজ্য। দুই-এর অধিক সেটের যে কোনো দুইটি সেট নিশ্ছেদ হলে আমরা বলি, সেটগুলি পরস্পর নিশ্ছেদ।

1. সংযোগ সেট (Union)

দুইটি সেটের সমস্ত উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সেট দুইটির সংযোগ সেট বলে। যদি A এবং B যে কোনো দুইটি সেট হয় তবে তাদের সংযোগ সেট, $A \cup B$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $A \cup B$ প্রতীকটিকে পড়া হয়, A সংযোগ B (A union B) অতএব, $A \cup B = \{x : x \in A$ অথবা, $x \in B\}$



$A \cup B$

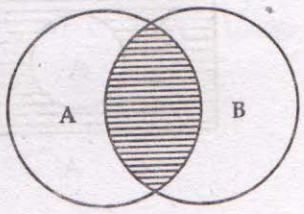
(i) $A = \{a, b, c, d\}$ এবং $B = \{f, b, d, h\}$ সেট দুইটির সংযোগ সেট $A \cup B = \{a, b, c, d, f, h\}$

ভেন চিত্রে (Venn diagram) A এবং B সেট দুইটির সংযোগ সেট, $A \cup B$ রেখাংকিত করা হয়েছে।

দ্রষ্টব্য ঃ (i) সংজ্ঞা থেকে এটা স্পষ্ট যে, $A \cup B = B \cup A$, (ii) $A \subseteq A \cup B$ এবং $B \subseteq A \cup B$ এবং (iii) $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ এবং $x \notin B$.

2. ছেদ সেট (Intersection)

দুইটি সেটের সাধারণ উপাদান নিয়ে যে সেট গঠিত হয় তাকে সেট দুইটির ছেদ সেট বলে। যদি A এবং B যে কোনো দুইটি সেট হয় তবে তাদের ছেদ সেট $A \cap B$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $A \cap B$ প্রতীকটিকে পড়া হয় 'A ছেদ B' (A intersection B)।



$A \cap B$

অতএব, $A \cap B = \{x \;:\; x \in A$ এবং $x \in B\}$.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ এবং $B = \{8, 10, 12\}$ হলে, $A \cap B = \{8, 10\}$.

ভেন চিত্রে A এবং B সেট দুইটির ছেদ সেট $A \cap B$ রেখাংকিত করা হয়েছে।

দ্রষ্টব্য : (i) সংজ্ঞা থেকে এটা স্পষ্ট যে, $A \cap B = B \cap A$, (ii) $A \cap B \subset A$ এবং $A \cap B \subset B$.

(ii) যদি A এবং B নিশ্ছেদ সেট হয়, সেক্ষেত্রে সেট দুইটির কোনো সাধারণ উপাদান থাকবে না। ফলে, $A \cap B = \varnothing$ হবে।

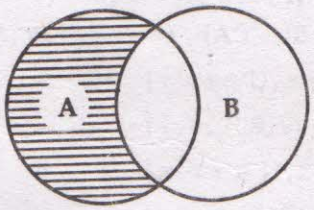
(iii) $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ এবং $x \notin B$.

3. অন্তর সেট (Difference set)

A এবং B দুইটি সেট হলে, যে সমস্ত উপাদান A সেটে আছে কিন্তু B সেটে নেই, এরূপ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে A এবং B এর অন্তর সেট বলে। A এবং B এর অন্তর সেটকে লেখা হয় $A \setminus B$ বা $A - B$ (পড়া হয়, A বাদ B) তদ্রূপ B সেটে আছে কিন্তু A সেটে নেই এরূপ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে B এবং A এর অন্তর সেট বলে। B এবং A এর অন্তর সেটকে লেখা হয় $B \setminus A$ বা $B - A$ (পড়া হয় B বাদ A)।

অতএব $A \setminus B = \{x \;:\; x \in A, x \notin B\}$

এবং $B \setminus A = \{x \;:\; x \in B, x \notin A\}$.



$S = \{a, b, c, d\}$ এবং $R = \{f, b, d, g\}$ হলে, $S \setminus R = \{a, c\}$ এবং $R \setminus S = \{f, g\}$। লক্ষণীয় যে, $R \setminus S$ এবং $S \setminus R$ সেট দুইটি নিশ্ছেদ সেট।

ভেন চিত্রে A এবং B সেট দুইটির অন্তর সেট $A \setminus B$ রেখাঙ্কিত করা হয়েছে।

দ্রষ্টব্য : (i) $A \setminus B \subset A$, $B \setminus A \subset B$

(ii) $A \setminus B$, $B \setminus A$ এবং $A \cap B$ সেট তিনটি পরস্পর নিশ্ছেদ।

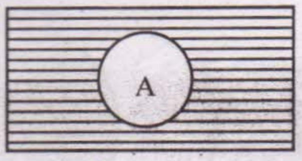
4. সার্বিক সেট (Universal set)

যখন আমরা কতকগুলি সেটের সম্পর্ক অথবা সেটের উপর প্রয়োগকৃত কার্যবিধি নিয়ে আলোচনা করি তখন আলোচনাধীন সেটগুলি কোনো মূল সেটের উপসেট হয়ে থাকে। এরূপ ক্ষেত্রে মূল সেটটিকে আলোচনাধীন উপসেটগুলির প্রেক্ষিতে এবং আলোচনাধীন প্রসঙ্গে সার্বিক সেট (Universal set) বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, যখন আমরা ইংরেজি বর্ণমালার কিছু অক্ষর নিয়ে বিভিন্ন সেট তৈরি করি তখন সার্বিক সেট হচ্ছে ইংরেজি বর্ণমালার সকল বর্ণ নিয়ে গঠিত সেট। সার্বিক সেটের সংকেত U. ভেন চিত্রে, সার্বিক সেটকে সাধারণত আয়তক্ষেত্র অথবা বর্গক্ষেত্র দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

মন্তব্য : 'সার্বিক সেট' কথাটি বহুল প্রচলিত কিন্তু সতর্কতার সঙ্গে ব্যবহার করতে হবে। কেননা এমন কোনো সার্বিক সেট নাই যা সকল প্রসঙ্গে প্রযোজ্য।

5. পূরক সেট (Complement)

কোনো সেটের উপাদানগুলিকে বাদ দিয়ে সার্বিক সেটের অন্যান্য সমস্ত উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে উক্ত সেটের পূরক সেট বলে। A যে কোনো সেট হলে এর পূরক সেটকে A' বা A^c প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



A'

অতএব, $A' = \{ x : x \in U, x \notin A\} = U \setminus A$

ভেন চিত্রে পূরক সেট রেখাঙ্কিত করা হয়েছে।

দ্রষ্টব্য ঃ (i) কোনো সেট A এবং এর পূরক সেট A'-এর সংযোগ হচ্ছে সার্বিক সেট U ; অর্থাৎ $A \cup A' = U$

(ii) সংজ্ঞা থেকে এটা স্পষ্ট যে সেট A এবং A' নিশ্ছেদ সেট। অতএব, $A \cap A' = \varnothing$

6. ক্রমজোড় (Ordered pair)

দুইটি সংখ্যার ক্রমজোড়ে একটি সংখ্যাকে প্রথম এবং অপরটিকে দ্বিতীয় পদ ধরা হয়। a ও b সংখ্যা দুইটি নিয়ে ক্রমজোড় (a, b) এবং আর একটি ক্রমজোড় (b, a) গঠন করা যায় এবং $a \neq b$ হলে (a, b) ও (b, a) ক্রমজোড় দুইটি এক নয়।

দ্রষ্টব্য ঃ $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ এবং $b = d$.

কার্তেসীয় সমতলে প্রতিটি বিন্দুই দুইটি বাস্তব সংখ্যার ক্রমজোড় নির্দেশ করে। ক্রমজোড়ে প্রথম পদ এবং দ্বিতীয় পদ একই হতে পারে। যেমন, $(1, 1), (3, 3), (6, 6)$ এগুলি এক একটি ক্রমজোড়।

7. কার্তেসীয় গুণজ (Cartesian product)

দুইটি সেটের উপাদান নিয়ে গঠিত সম্ভাব্য সকল ক্রমজোড়ের সেটকে উক্ত সেট দুইটির গুণফল সেট বা **কার্তেসীয় গুণজ সেট** বলে। ক্রমজোড়গুলির প্রথম পদ প্রথম সেট থেকে এবং দ্বিতীয় পদ দ্বিতীয় সেট থেকে নিতে হবে। A এবং B দুইটি সেট হলে, সেট দুইটির কার্তেসীয় গুণজ সেট হবে ক্রমজোড় (a, b) সমূহের সেট যেখানে $a \in A$ এবং $b \in B$; A এবং B-এর কার্তেসীয় গুণজ সেটকে $A \times B$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় 'A ক্রস B' (A cross B).

অতএব $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

উদাহরণ ঃ

$A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{a, b\}$ হলে,

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

$B \times B = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a)\}$

উদা. 1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$ হলে $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ এবং $B \cup B$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

উত্তর ঃ
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$
$$A \cup C = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$B \cup C = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{2, 4, 6, 8, 3, 5\}$$
$$B \cup B = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{2, 4, 6, 8\} = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 8, 3, 5\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 5\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

$$(A\cup B)\cup C = \{1,2,3,4,6,8\}\cup\{3,4,5,6\}$$
$$= \{1,2,3,4,5,6,8\}$$
$$\therefore\ A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C.$$

উদা. 2. $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{b,d,f,h\}$, $C=\{c,d,e,f\}$ হলে, $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$, $B\cap B$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

উত্তর ঃ $A\cap B=\{b,d\}$, $A\cap C=\{c,d\}$, $B\cap C=\{d,f\}$

$B\cap B=\{b,d,f,h\}$

লক্ষণীয় যে, $B\cap B = B$,

$(A\cap B)\cap C=\{b,d\}\cap\{c,d,e,f\}=\{d\}$

$A\cap(B\cap C)=\{a,b,c,d\}\cap\{d,f\}=\{d\}$

$\therefore\ (A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

উদা. 3. $A=\{3,4,5,6\}$, $B=\{4,6,8,10\}$, $C=\{5,6,7,8\}$ হলে, $A\setminus B$, $C\setminus A$, $B\setminus C$, $B\setminus A$, $B\setminus B$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ
$$A\setminus B = \{3,4,5,6\}\setminus\{4,6,8,10\} = \{3,5\}$$
$$C\setminus A = \{5,6,7,8\}\setminus\{3,4,5,6\} = \{7,8\}$$
$$B\setminus C = \{4,6,8,10\}\setminus\{5,6,7,8\} = \{4,10\}$$
$$B\setminus A = \{4,6,8,10\}\setminus\{3,4,5,6\} = \{8,10\}$$
$$B\setminus B = \{4,6,8,10\}\setminus\{4,6,8,10\} = \phi$$

উদা. 4. মনে করি, $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{2,3,4,5\}$, $B=\{4,6,8\}$, $C=\{3,4,5,6,7\}$; A', B', $(A\cap C)'$, $(A\cup B)'$, $(A')'$, $(B\setminus C)'$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ
$$A' = \{x : x\in U, x\notin A\}$$
$$= \{1,6,7,8,9\}$$
$$B' = \{x : x\in U, x\notin B\}$$
$$= \{1,2,3,5,7,9\}$$
$$A\cap C = \{3,4,5\}$$
$$\therefore\ (A\cap C)' = \{1,2,6,7,8,9\}$$
$$A\cup B = \{2,3,4,5,6,8\}$$
$$\therefore\ (A\cup B)' = \{1,7,9\}$$
$$A' = \{1,6,7,8,9\}$$
$$\therefore\ (A')' = \{2,3,4,5\}$$
$$B\setminus C = \{x : x\in B, x\notin C\}$$
$$= \{4,6,8\}-\{3,4,5,6,7\} = \{8\}$$
$$\therefore\ (B\setminus C)' = \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$$

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

যেখানে, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$

[চ. বো. ২০০৫ ; সি. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০১ ; রা. বো. ২০০০ ; ঢা. বো. ২০০৩,'০১]

প্রমাণ ঃ $A \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{2, 3, 5, 6, 7\} = \{1, 4\}$

$B \setminus A = \{2, 3, 5, 6, 7\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7\}$

$\therefore \quad (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 4\} \cup \{6, 7\} = \{1, 4, 6, 7\}$

আবার, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ এবং $A \cap B = \{2, 3, 5\}$

$\therefore \quad (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{2, 3, 5\} = \{1, 4, 6, 7\}$

অতএব, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

উদা. 6. A, B যে কোনো দুইটি সেট এবং B', B-এর পূরক সেট হলে দেখাও যে, $A - B = A \cap B'$

প্রমাণ ঃ $A \setminus B = \{x \ : \ x \in A$ এবং $x \notin B\}$

$= \{x \ : \ x \in A$ এবং $x \in B'\}$

$= A \cap B'$

উদা. 7. মনে কর A, B, C তিনটি সেট যেন $A \cup C = B \cup C$ এবং $A \cap C = B \cap C$

প্রমাণ কর যে, A = B.

ধরি, $x \in A \Rightarrow x \in A \cup C \Rightarrow x \in B \cup C$ কেননা $A \cup C = B \cup C$

$\Rightarrow \quad x \in B$ অথবা, $x \in C$

যদি $x \in C$ হয় তবে $x \in A \cap C$ হবে।

$\Rightarrow \quad x \in B \cap C$ কেননা $A \cap C = B \cap C$

$\Rightarrow \quad x \in B$ অতএব এক্ষেত্রে $x \in B$ হবে। অর্থাৎ $x \in A \Rightarrow x \in B$; সুতরাং $A \subseteq B$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $B \subseteq A$. অতএব $A = B$.

উদা. 8. প্রমাণ কর যে, $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$

প্রমাণ ঃ মনে করি $x \in (A \setminus B) \cap B$

$\Rightarrow x \in A \setminus B$ এবং $x \in B$

কিন্তু অন্তর সেটের সংজ্ঞানুযায়ী $x \in A$ এবং $x \notin B$.

কিন্তু এমন কোনো উপাদান নেই যা একই সাথে $x \in B$ এবং $x \notin B$ সিদ্ধ করে,

অতএব, $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, $A \setminus B \subset A \cup B$.

প্রমাণ ঃ মনে করি, $x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A$ এবং $x \notin B$

$\Rightarrow \quad x \in A \cup B$

$\therefore \quad A \setminus B \subset A \cup B.$

উদা. 10. প্রমাণ কর যে, $A' \setminus B' = B \setminus A$

প্রমাণ ঃ মনে করি, $x \in A' \setminus B' \Rightarrow x \in A'$ এবং $x \notin B'$

$\Rightarrow \quad x \notin A$ এবং $x \in B \Rightarrow x \in B$ এবং $x \notin A \Rightarrow x \in (B \setminus A)$

$\therefore \quad A' \setminus B' \subset B \setminus A$

এখন মনে করি, $x \in B \setminus A \Rightarrow x \in B$ এবং $x \notin A$

$\Rightarrow \quad x \notin B'$ এবং $x \in A'$

$\Rightarrow \quad x \in A'$ এবং $x \notin B'$

$\Rightarrow \quad x \in A' \setminus B'$

$\therefore \quad B \setminus A \subset A' \setminus B'$

অতএব, $A' \setminus B' = B \setminus A$.

উদা. 11. যদি $A \subseteq B$ এবং $C \subseteq D$ হয় তবে দেখাও যে, $(A \times C) \subseteq (B \times D)$

প্রমাণ ঃ মনে করি, $(x, y) \in A \times C$; তবে, $x \in A$ এবং $y \in C$;

প্রদত্ত শর্তানুসারে A, B-এর উপসেট এবং C, D-এর উপসেট,

তাহলে, $x \in B$ এবং $y \in D$; অতএব, ক্রমজোড়, $(x, y) \in (B \times D)$,

আমরা পাই, $(x, y) \in A \times C$ হলে, $(x, y) \in (B \times D)$

$\therefore \quad A \times C \subseteq B \times D.$

উদা. 12. প্রমাণ কর, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

[চ. বো. ২০০৯, ২০০১; য. বো. ২০০৮; ব. বো. ২০০৭]

প্রমাণ ঃ প্রথমে দেখাতে হবে $A \times (B \cap C)$ হচ্ছে $(A \times B) \cap (A \times C)$-এর উপসেট।

মনে করি $(x, y) \in A \times (B \cap C)$; তবে $x \in A$ এবং $y \in B \cap C$; ছেদ সেটের সংজ্ঞানুযায়ী $y \in B$ এবং $y \in C$, যেহেতু $x \in A$ এবং $y \in B$; অতএব, $(x, y) \in A \times B$; আবার যেহেতু, $x \in A$ এবং $y \in C$, অতএব, $(x, y) \in A \times C$। আমরা পাচ্ছি, $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$:

$\therefore A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$

এখন, দেখাতে হবে যে, $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$.

মনে করি, $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$; তাহলে, $(x, y) \in A \times B$ এবং $(x, y) \in A \times C$; অতএব, $x \in A$ এবং $y \in B$ এবং $x \in A$ এবং $y \in C$। যেহেতু, $y \in B$ এবং $y \in C$, অতএব, $y \in B \cap C$। আমরা পাই, $x \in A$ এবং $y \in B \cap C$; অতএব, $(x, y) \in A \times (B \cap C)$

$\therefore \quad (A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$

দুইটি সেটের সমান হওয়ার শর্ত থেকে পাই,

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

উদা. 13. $S = \{a, b\}$, $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $V = \{3, 5, 7, 9\}$; $(S \times W) \cap (S \times V)$ নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ আমরা জানি, $(S \times W) \cap (S \times V) = S \times (W \cap V)$ [উদা. 12 দ্রষ্টব্য]

এখানে $\quad W \cap V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{3, 5, 7, 9\} = \{3, 5\}$

$$\begin{aligned} \therefore \quad (S \times W) \cap (S \times V) &= S \times (W \cap V) \\ &= \{a, b\} \times \{3, 5\} = \{(a, 3), (a, 5), (b, 3), (b, 5)\} \end{aligned}$$

উদা. 14. $(x + y, 1)$ এবং $(3, x - y)$ ক্রমজোড় দুইটি সমান হলে, x এবং y-এর মান নির্ণয় কর।

$(x + y, 1) = (3, x - y)$

$\therefore \quad x + y = 3$

এবং $x - y = 1$

সহসমীকরণ দুইটি সমাধান করে পাই,

$x = 2, y = 1.$

উদা. 15. দেখাও যে, $A \setminus B = A \cap B' = B' \setminus A'$

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x : x \in A \text{ এবং } x \notin B\} \\ &= \{x : x \in A \text{ এবং } x \in B'\} \\ &= A \cap B' \\ &= \{x : x \in A \text{ এবং } x \in B'\} \\ &= \{x : x \notin A' \text{ এবং } x \in B'\} \\ &= \{x : x \in B' \text{ এবং } x \notin A'\} \\ &= B' \setminus A' \end{aligned}$$

উদা. 16. A, B, C যে কোনো সেট হলে প্রমাণ কর ঃ

$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$ [চ. বো. ২০১০, ২০০৮, ২০০৬, ২০০৩ ; দি. বো. ২০১০; ঢা. বো. ২০০৮, ২০০৬, ২০০০ ; রা বো. ২০০৮, ২০০৬, ২০০৪ ; কু. বো. ২০০৮, ২০০২ ; সি. বো. ২০০৮; য. বো. ২০০৬, ২০০৪; ব. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০০৮, ২০০৬]

$x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$\Leftrightarrow$ $x \in A \setminus B$ এবং $x \in A \setminus C$

$\Leftrightarrow$ $x \in A, x \notin B$ এবং $x \in A, x \notin C$

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ এবং $x \notin B \cup C$

$\Leftrightarrow$ $x \in A \setminus (B \cup C)$

$\therefore$ $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$

উদা. 17. $A \times B = B \times A$ হলে প্রমাণ কর যে, $A \in B$.

দেখাতে হবে $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$. মনে করি $a \in A$ এবং $b \in B$ যে কোনো উপাদান। দেখাতে হবে $a \in B$ এবং $b \in A$

এখন $(a, b) \in A \times B$, সুতরাং $(a, b) \in B \times A$ কেননা $A \times B = B \times A$.

সুতরাং এমন একটি উপাদান $b' \in B$ এবং একটি উপাদান $a' \in A$ রয়েছে যখন $(a, b) = (b', a')$ হয়।

ফলে $a = b' \in B$ এবং $b = a' \in A$. সুতরাং দাবি প্রমাণিত হলো।

৪. সেটের সংযোগ, ছেদ, বিয়োগ এবং পূরক প্রক্রিয়া সম্পর্কিত কতিপয় বিধি

(a) A যে কোনো সেট হলে (i) $A \cup A = A$ এবং (ii) $A \cap A = A$

প্রমাণ ঃ সংজ্ঞা হতে পরিষ্কার।

(b) সংযোগ বিধি (Associative Law) ঃ A, B, C যে কোনো তিনটি সেট হলে,

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

প্রমাণ ঃ (i) $x \in (A \cup B) \cup C$

$\Leftrightarrow$ $x \in A \cup B$, অথবা, $x \in C$

$\Leftrightarrow$ ($x \in A$ অথবা $x \in B$) অথবা, $x \in C$

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ অথবা ($x \in B$ অথবা $x \in C$)

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ অথবা, $x \in B \cup C$

$\Leftrightarrow$ $x \in A \cup (B \cup C)$

$\therefore$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) $x \in (A \cap B) \cap C$

$\Leftrightarrow$ $x \in A \cap B$ এবং $x \in C$

$\Leftrightarrow$ ($x \in A$ এবং $x \in B$) এবং $x \in C$

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ এবং ($x \in B$ এবং $x \in C$)

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ এবং $x \in B \cap C$

$\Leftrightarrow$ $x \in A \cap (B \cap C)$

$\therefore$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

অতএব, দেখা যাচ্ছে সেটের সংযোগ ও ছেদ প্রক্রিয়া সংযোজন বিধি মেনে চলে।

(c) বিনিময় বিধি (Commutative Law) ঃ A এবং B যে কোনো দুইটি সেট হলে, (i) $A \cup B = B \cup A$, (ii) $A \cap B = B \cap A$.

প্রমাণ ঃ সংজ্ঞা হতে পরিষ্কার।

(d) বণ্টন বিধি (Distributive Law) ঃ A, B, C যে কোনো তিনটি সেট হলে,

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ [চ. বো. ২০০৪; রা. বো. ২০০২; সি. বো. ২০০২]

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [ব. বো. ২০০৪; য. বো. ২০০২]

প্রমাণ ঃ (i) মনে করি, $x \in A \cup (B \cap C)$

তাহলে $x \in A$ অথবা, $x \in B \cap C \Rightarrow x \in A$ অথবা $x \in B$ এবং $x \in C$.

$\Leftrightarrow$ $x \in A$ অথবা $x \in B$ এবং $x \in A$ অথবা $x \in C$

$\Leftrightarrow$ $x \in A \cup B$ এবং $x \in A \cup C$

$\Leftrightarrow$ $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\therefore$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ এবং ($x \in B$ অথবা, $x \in C$)

$\Leftrightarrow$ ($x \in A$ এবং $x \in B$) অথবা, ($x \in A$ এবং $x \in C$)

$\Leftrightarrow$ $x \in A \cap B$ অথবা $x \in A \cap C$

$\Leftrightarrow$ $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\therefore$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

অতএব, সেটের সংযোগ ও ছেদ প্রক্রিয়া বণ্টন বিধি মেনে চলে।

(e) অভেদক বিধি (Identity Law) ঃ

A যে কোনো সেট, U সার্বিক সেট এবং $\varnothing$ শূন্য সেট হলে,

(i) $A \cup \varnothing = A$, (ii) $A \cap U = A$, (iii) $A \cup U = U$, (iv) $A \cap \varnothing = \varnothing$

প্রমাণ ঃ সংজ্ঞা হতে পরিষ্কার।

(f) পূরক বিধি (Complement Law) ঃ

U সার্বিক সেট, A যে কোনো একটি সেট এবং $\varnothing$ ফাঁকা সেট এবং U', A' এবং $\varnothing'$ যথাক্রমে তাদের পূরক সেট হলে,

(i) $A \cup A' = U$, (ii) $A \cap A' = \varnothing$, (iii) $(A')' = A$ (iv) $U' = \varnothing$, $\varnothing' = U$.

প্রমাণ ঃ সংজ্ঞা হতে পরিষ্কার।

(g) দ্য মরগানের বিধি (De Morgan's Laws) ঃ

A, B যে কোনো দুইটি সেট এবং A' ও B' তাদের পূরক সেট হলে

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ **[রা. বো. ২০১০, ২০০৭ ; ব. বো. ২০১০, ২০০২; ঢা. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৯, ২০০৫; য. বো. ২০০৯; চ. বো. ২০০৭ ; সি. বো. ২০০৬]**

(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ **[সি. বো. ২০১০, ২০০৬, ২০০৩; ঢা. বো. ২০০৯, ২০০৭ ; দি. বো. ২০০৯; কু. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৫]**

প্রমাণ ঃ (i) $x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin A \cup B$,

$\Leftrightarrow$ $x \notin A$ এবং $x \notin B$, $\Leftrightarrow x \in A'$ এবং $x \in B'$

অতএব, ছেদ সেটের সংজ্ঞানুযায়ী, $x \in A' \cap B'$

$\therefore$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) $x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \notin A \cap B$

$\Leftrightarrow \quad x \notin A$ অথবা $x \notin B \Leftrightarrow x \in A'$ অথবা $x \in B'$

$\Leftrightarrow \quad x \in A' \cup B'$

$\therefore \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$

দুইয়ের অধিক সেটের জন্যও দ্য মরগানের বিধি সম্প্রসারিত করা যায়। যেমন, $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$; কেননা, $(A \cup B \cup C)' = ((A \cup B) \cup C)' = (A \cup B)' \cap C' = (A' \cap B') \cap C' = A' \cap B' \cap C'$.

উপরের সূত্রসমূহ প্রয়োগ করে সেট সংক্রান্ত অভেদ সহজেই প্রমাণ করা যায়।

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$

প্রমাণ : $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B')$ [বণ্টন বিধি]

$= A \cap U$ [$\because B \cup B' = U$]

$= A$ [অভেদক বিধি]

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$

প্রমাণ : $(B \cup C) \cap A = A \cap (B \cup C)$ [বিনিময় বিধি]

$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$ [বণ্টন বিধি]

$= (B \cap A) \cup (C \cap A)$ [বিনিময় বিধি]

উদা 3. প্রমাণ কর যে, $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

প্রমাণ : $A \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap (A \cup B)$ [বণ্টন বিধি]

$= U \cap (A \cup B)$ [পূরক বিধি]

$= A \cup B$ [অভেদক বিধি]

9. সেটের উপাদান সংখ্যা

A সান্ত (finite) সেট হলে, A-এর উপাদান সংখ্যা বুঝাতে আমরা $n(A)$ লিখি।

সূত্র : (i) A এবং B সান্ত সেট হলে $A \cup B$ একটি সান্ত সেট এবং

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

দ্রষ্টব্য : A এবং B সেট দুইটি নিশ্ছেদ সেট হলে $A \cap B$ ফাঁকা সেট হবে। সেক্ষেত্রে $n(A \cap B) = 0$

অতএব, নিশ্ছেদ সেট A এবং B-এর জন্য

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

সূত্র (ii) : A এবং B উভয়ে কোনো সান্ত সেট S-এর উপসেট হলে

$n((A \cup B)') = n(S) - n(A \cup B)$

$= n(S) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)$ [(i) নং সূত্র থেকে]

সূত্র (iii) : A, B, C সান্ত সেট হলে

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

দ্রষ্টব্য : যদি A, B, C পরস্পর নিশ্ছেদ সেট হয়, তবে $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ এবং $A \cap B \cap C$ প্রত্যেকে ফাঁকা সেট। সুতরাং এদের প্রত্যেকের উপাদান সংখ্যা শূন্য।

অতএব, A, B, C পরস্পর নিশ্ছেদ সেট হলে, $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$

সূত্র (iv) যদি A, B, C প্রত্যেকে কোনো সান্ত সেট S-এর উপসেট হয়, তবে,

$n((A \cup B \cup C)') = n(S) - n(A) - n(B) - n(C) + n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - n(A \cap B \cap C)$.

(সূত্রগুলির প্রমাণ মাধ্যমিক বীজগণিত পাঠ্যপুস্তকে দ্রষ্টব্য।)

উদা. 1. একাদশ শ্রেণীর মোট 120 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 85 জন গণিত, 90 জন পদার্থবিজ্ঞান ও 62 জন গণিত ও পদার্থবিজ্ঞান উভয় বিষয়ই নিয়েছে। কতজন ছাত্র গণিত অথবা পদার্থবিজ্ঞান বিষয় দুইটির কোনোটিই নেয়নি ? [কু. বো. ২০১০]

উত্তর ঃ একাদশ শ্রেণীর বিজ্ঞান শিক্ষার্থীদের সেট S এবং গণিত ও পদার্থবিজ্ঞান শিক্ষার্থীদের উপসেট যথাক্রমে M এবং P হলে প্রশ্নানুসারে, $n(S) = 120$, $n(M) = 85$ এবং $n(P) = 90$ এবং $n(M \cap P) = 62$.

$$\begin{aligned} \therefore n((M \cup P)') &= n(S) - n(M) - n(P) + n(M \cap P) = n(S) - n(M \cup P) \\ &= 120 - 85 - 90 + 62 \\ &= 182 - 175 \\ &= 7 \end{aligned}$$

7 জন শিক্ষার্থী গণিত অথবা পদার্থবিজ্ঞান কোনো বিষয়ই নেয়নি।

উদা. 2. কোনো শ্রেণীতে শিক্ষার্থীদের মধ্যে 28 জন পদার্থবিজ্ঞান, 23 জন গণিত, 23 জন রসায়ন, 12 জন পদার্থবিজ্ঞান ও গণিত, 11 জন পদার্থবিজ্ঞান ও রসায়ন, 8 জন গণিত ও রসায়ন এবং 5 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। প্রত্যেক শিক্ষার্থীকেই উক্ত বিষয়গুলির অন্তত একটি নিতে হয়েছে। শ্রেণীটির মোট শিক্ষার্থী সংখ্যা নির্ণয় কর।

উত্তর ঃ P, M এবং C যথাক্রমে পদার্থবিজ্ঞান, গণিত এবং রসায়নের ছাত্রদের সেট হলে, $n(P) = 28$, $n(M) = 23$, $n(C) = 23$, $n(P \cap M) = 12$, $n(P \cap C) = 11$, $n(M \cap C) = 8$ এবং $n(P \cap M \cap C) = 5$.

এখন, $$\begin{aligned} n(P \cup M \cup C) &= n(P) + n(M) + n(C) - n(P \cap M) - n(M \cap C) - n(P \cap C) + n(P \cap M \cap C) \\ &= 28 + 23 + 23 - 12 - 8 - 11 + 5 \\ &= 79 - 31 \\ &= 48 \end{aligned}$$

মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা 48 জন।

প্রশ্নমালা IA

1. $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ এবং $C = \{1, 2, 3, 4\}$ হলে,
$A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $B \cup B$, $A \cup A$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6\}$ হলে, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap A$, $B \cap B$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. $A = \{6, 7, 8, 9\}$, $B = \{7, 9, 1, 2\}$, $C = \{8, 9, 5, 1\}$ হলে, $A \setminus B$, $C \setminus A$, $B \setminus C$, $B \setminus A$ এবং $B \setminus B$ নির্ণয় কর।

4. সার্বিক সেট $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{5, 7, 9\}$ এবং $C = \{6, 7, 5, 9\}$; A', B', $(A \cap C)'$, $(A')'$ এবং $(B \setminus C)'$ নির্ণয় কর।

5. সার্বিক সেট $X = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, d\}$ এবং $B = \{b, d, e\}$ । $A \cup B$, $B \cup A$, B', $B \setminus A$, $A' \cap B$, $A \cup B'$, $A' \cap B'$, $B' \setminus A'$, $(A \cap B)'$, $(A \cup B)'$ নির্ণয় কর।

6. A এবং B সেট দুইটি সার্বিক সেট U-এর উপসেট। কোন্ শর্তাধীনে নিচের তথ্যগুলি সঠিক হবে তা নির্ণয় কর।
(i) $A \cup B = A \cap B$ (ii) $A \cup B = A$ (iii) $A \cap B = A$ (iv) $A \cap B = \varnothing$
(v) $A \cup B = \varnothing$ (vi) $A \cup B = U$ (vii) $A \cup \varnothing = U$ (viii) $A' \cup \varnothing = \varnothing$

7. A এবং B সেট দুইটি সার্বিক সেট U-এর উপসেট। A' এবং B' যথাক্রমে A এবং B এর পূরক সেট এবং $\varnothing$ ফাঁকা সেট হলে নির্ণয় কর ঃ
(i) $A \cap A'$ (ii) $A \cup A'$ (iii) $A \cap A$ (iv) $A \cup A$ (v) $\varnothing'$
(vi) U' (vii) $\varnothing \cup A$ (viii) $U \cap A$ (ix) $(B')'$

8. $A = \{x \,:\, x \in Z, x \geq 9\}, B = \{x \,:\, x \in Z, x \geq 2\}$ সেট দুইটির সংযোগ ও ছেদ সেট নির্ণয় কর।

9. (i) $A = \{x \,:\, x + 8 = 8\}$ এবং $B = \{x \,:\, x^2 = 9, 2x = 4\}$;
$A \setminus B$ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৩; মা. বো. ২০০৯, ২০০৩]
(ii) $A = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}, B = \{x : x^2 - 11x + 24 = 0\}$ হলে $A \cap B$ এবং $A \setminus B$ নির্ণয় কর।
[ঢা. বো. ২০১০; সি. বো. ২০০৯; ব. বো. ২০০৮; কু. বো. ২০০৭ ; য. বো. ২০০৫]

10. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x$ জোড় সংখ্যা$\}$, $C = \{x \mid x$ হচ্ছে 3 এর গুণিতক$\}$। [য. বো. ২০০৭]
$A \cup (B \cap C)$ এবং $A \cap (B \cup C)$ নির্ণয় কর।

11. A এবং B যে কোনো দুইটি সেট হলে, দেখাও যে,
(i) $A \subset A \cup B,\ B \subset A \cup B$
(ii) $A \cap B \subset A,\ A \cap B \subset B$
(iii) $A - B \subset A$

12. A, B যে কোনো দুইটি সেট এবং A′, A এর পূরক সেট হলে দেখাও যে,
(i) $B \setminus A \subset A'$
(ii) $B \setminus A' = B \cap A$

13. $A \cap B = \phi$ হলে, দেখাও যে,
(i) $A \subseteq B'$ যেখানে B′, B-এর পূরক সেট।
(ii) $B \cap A' = B$, যেখানে A′, A-এর পূরক সেট।
(iii) $A \cup B' = B'$, যেখানে B′, B-এর পূরক সেট।

14. $A \subseteq B$ হলে,
প্রমাণ কর ঃ
(i) $A \cap B = A$
(ii) $A \cup B = B$
(iii) $B' \subseteq A'$
(iv) $A \cup (B \setminus A) = B$

15. A, B, C যে কোনো তিনটি সেট হলে, প্রমাণ কর যে,
$(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$

16. A, B যে কোনো দুইটি সেট, U সার্বিক সেট এবং A′, A এর পূরক সেট ; যদি $A \cup B = U$, হয় তবে দেখাও যে, $A' \subseteq B$।

17. প্রমাণ কর ঃ
(i) $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$
(ii) $A \cup (A \cap B) = A$
(iii) $A \cap (A \cup B) = A$

18. $A = \{a, b\}, B = \{2, 3\}$ এবং $C = \{3, 4\}$ হলে,
$A \times (B \cup C), (A \times B) \cup (A \times C), A \times (B \cap C), (A \times B) \cap (A \times C)$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে,
(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup ((A \times C)$ [ঢা. বো. ২০১০, ২০০৫; মা. বো. ২০১০, ২০০৫]
(ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

19. $A = B \cap C$ হলে, প্রমাণ কর যে,
(i) $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$ (ii) $A \times A = (B \times C) \cap (C \times B)$

20. সরল কর : $\{(A \cup B) \cup (B \cup C) \cup (C \cup A)\}'$

21. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6, 9\}$ সেট তিনটির জন্য, $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$ সূত্রটির সত্যতা প্রমাণ কর।

22. $A = \{1, 3, 5, 7\}$ এবং $B = \{2, 4, 6\}$ হলে মান নির্ণয় কর :
(i) $n(A \times A)$, (ii) $n(A \times B)$, (iii) $n(B \times A)$, (iv) $n(B \times B)$

23. $n(A) = 17$, $n(B) = 28$ এবং $n(A \cap B) = 14$ হলে $n(A \cup B)$ নির্ণয় কর।

24. 50 জন ছাত্রের মধ্যে কেউ কেবলমাত্র গণিত, কেউ কেবলমাত্র জীববিদ্যা এবং কেউ গণিত এবং জীববিদ্যা উভয় বিষয়ই গ্রহণ করেছে। যদি 40 জন ছাত্র জীববিদ্যা এবং 20 জন ছাত্র গণিত গ্রহণ করে থাকে তবে কেবলমাত্র গণিত এবং গণিত ও জীববিদ্যা উভয় বিষয় কতজন ছাত্র গ্রহণ করেছে ?

25. প্রথম বর্ষ স্নাতক শ্রেণীতে 20 জন ছাত্র ইতিহাস, 16 জন পৌরনীতি এবং 10 জন গার্হস্থ্য অর্থনীতি অধ্যয়ন করে। এদের মধ্যে 10 জন ছাত্র ইতিহাস এবং পৌরনীতি, 5 জন পৌরনীতি এবং গার্হস্থ্য অর্থনীতি এবং 3 জন ছাত্র তিনটি বিষয়ই অধ্যয়ন করে। কতজন ছাত্র একটি অথবা একাধিক বিষয় অধ্যয়ন করে তা ভেন চিত্রের সাহায্যে অথবা অন্যভাবে নির্ণয় কর।

26. কোনো প্রতিষ্ঠানে প্রত্যেক শিক্ষার্থীকে হয় বাস্কেটবল, নয় ফুটবল নতুবা সাঁতারে অংশগ্রহণ করতে হয়। একজন রিপোর্টার স্থানীয় দৈনিকে খবর পাঠালেন যে মোট 50 জন ছাত্রের মধ্যে 25 জন বাস্কেটবলে, 15 জন ফুটবলে, 25 জন সাঁতারে, 4 জন বাস্কেটবল এবং ফুটবলে, 10 জন ফুটবল ও সাঁতারে এবং 8 জন বাস্কেটবল ও সাঁতারে এবং 3 জন তিনটি খেলাতেই অংশগ্রহণ করেছে। প্রমাণ কর যে, রিপোর্টারের গণনায় ভুল ছিল।

উত্তরমালা

1. $\{2, 4, 6, 8, 3, 5\}$, $\{2, 4, 6, 8, 1, 3\}$, $\{3, 4, 5, 6, 1, 2\}$,
$\{3, 4, 5, 6\} = B$, $\{2, 4, 6, 8\} = A$

2. $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 6\}$, $\{1, 2, 3, 4\} = A$, $\{2, 4, 6, 8\} = B$

3. $\{6, 8\}$, $\{5, 1\}$, $\{7, 2\}$, $\{1, 2\}$, ϕ

4. $A' = \{1, 2, 3, 8, 9\}$, $B' = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
$(A \cap C)' = \{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$
$(A')' = A$
$(B - C)' = U$

5. $\{a, b, d, e\}$, $\{a, b, d, e\}$, $B' = \{a, c\}$, $\{e\}$, $\{e\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{c\}$, $\{a\}$, $\{a, c, e\}$, $\{c\}$

6. (i) $A = B$ (ii) $B \subseteq A$ (iii) $A \subseteq B$ (iv) $B = A'$ (v) $A = \varnothing$, $B = \varnothing$ (vi) $B = A'$ (vii) $U = A$ (viii) $U = A$

7. (i) $\varnothing$ (ii) U, (iii) A, (iv) A, (v) U (vi) ϕ, (vii) A, (viii) A, (ix) B.

8. B, A 9. (i) A (ii) $\{3\}$, $\{2\}$ 10. $\{1, 2, 3, 6, 12, 18, \ldots\ldots\ldots\}$, $\{2, 3\}$

18. $\{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$
$\{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3), (a, 4), (b, 4)\}$
$\{(a, 3), (b, 3)\}$, $\{(a, 3), (b, 3)\}$

19. (i) সঠিক (ii) সঠিক 20. $B' \cap C' \cap A'$

22. (i) 16, (ii) 12, (iii) 12, (iv) 9 23. 31 24. 10, 10 25. 31

প্রথম অধ্যায়

সেট ও ফাংশন

SET AND FUNCTION

প্রশ্নমালা IA

1. $A\cup B = \{2,4,6,8,3,5\}$, $A\cup C = \{2,4,6,8,1,3\}$

$B\cup C = \{3,4,5,6,1,2\}$, $B\cup B = \{3,4,5,6\} = B$

$A\cup A = \{2,4,6,8\} = A$

$\therefore (A\cup B)\cup C = \{2,4,6,8,3,5\}\cup\{1,2,3,4\}$

$= \{1,2,3,4,5,6,8\}$

এবং $A\cup(B\cup C) = \{2,4,6,8\}\cup\{3,4,5,6,1,2\}$

$= \{1,2,3,4,5,6,8\}$

অতএব, $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

2. $A\cap B = \{1,2,3,4\}\cap\{2,4,6,8\} = \{2,4\}$

$A\cap C = \{1,2,3,4\}\cap\{3,4,5,6\} = \{3,4\}$

$B\cap C = \{2,4,6,8\}\cap\{3,4,5,6\} = \{4,6\}$

$A\cap A = \{1,2,3,4\}\cap\{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4\} = A$

$B\cap B = \{2,4,6,8\}\cap\{2,4,6,8\} = \{2,4,6,8\} = B$

$\therefore (A\cap B)\cap C = \{2,4\}\cap\{3,4,5,6\} = \{4\}$

এবং $A\cap(B\cap C) = \{1,2,3,4\}\cap\{4,6\} = \{4\}$

অতএব, $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$

3. $A - B = \{6,7,8,9\} - \{7,9,1,2\} = \{6,8\}$

$C - A = \{8,9,5,1\} - \{6,7,8,9\} = \{5,1\}$

$B - C = \{7,9,1,2\} - \{8,9,5,1\} = \{7,2\}$

$B - A = \{7,9,1,2\} - \{6,7,8,9\} = \{1,2\}$

$B - B = \{7,9,1,2\} - \{7,9,1,2\} = \{\ \} = \phi$

4. $A' = X - A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} - \{4,5,6,7\}$

$= \{1,2,3,8,9\}$

$B' = X - B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} - \{5,7,9\}$

$= \{1,2,3,4,6,8\}$

$A \cap C = \{4, 5, 6, 7\} \cap \{6, 7, 5, 9\} = \{5, 6, 7\}$

$\therefore (A \cap C)' = X - (A \cap C)$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{5, 6, 7\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$

$(A')' = X - A'$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 8, 9\}$

$= \{4, 5, 6, 7\} = A$

$B - C = \{5, 7, 9\} - \{6, 7, 5, 9\} = \{\ \} = \phi$

$(B - C)' = X - (B - C)$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \phi$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = X$

5. $A \cup B = \{a, b, d\} \cup \{b, d, e\} = \{a, b, d, e\}$

$B \cup A = \{b, d, e\} \cup \{a, b, d\} = \{b, d, e, a\}$

অতএব, দেখা যাচ্ছে, $A \cup B = B \cup A$

$B' = X - B = \{a, b, c, d, e\} - \{b, d, e\} = \{a, c\}$

$B - A = \{b, d, e\} - \{a, b, d\} = \{e\}$

$A' = X - A = \{a, b, c, d, e\} - \{a, b, d\} = \{c, e\}$

$A' \cap B = \{c, e\} \cap \{b, d, e\} = \{e\}$

$A \cup B' = \{a, b, d\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c, d\}$

$A' \cap B' = \{c, e\} \cap \{a, c\} = \{c\}$

$B' - A' = \{a, c\} - \{c, e\} = \{a\}$

$(A \cap B)' = X - (A \cap B)$

$= \{a, b, c, d, e\} - \{a, b, d\} \cap \{b, d, e\}$

$= \{a, b, c, d, e\} - \{b, d\}$

$= \{a, c, e\}$

$(A \cup B)' = X - (A \cup B) = \{a, b, c, d, e\} - \{a, b, d, e\}$

$= \{c\}$

6. **(i)** $A = B$ **(ii)** $B \subset A$ **(iii)** $A \subset B$ **(iv)** $B = A'$ **(v)** $A = \phi, B = \phi$ **(vi)** $B = A'$ **(vii)** $U = A$ **(viii)** $U = A$

7. **(i)** $A \cap A' = \phi$ **(ii)** $A \cup A' = U$ **(iii)** $A \cap A = A$ **(iv)** $A \cup A = A$ **(v)** $\phi' = U$ **(vi)** $U' = \phi$ **(vii)** $\phi \cup A = A$ **(viii)** $U \cap A = A$ **(ix)** $(B')' = B$

8. $A = \{9, 10, 11, 12 \ldots\ldots\}$

$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\ldots\}$

$\therefore A \cup B = \{9, 10, 11, \ldots\ldots\} \cup \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \ldots\ldots\}$

$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\ldots\}$

$= B$

এখানে $A \subset B$, অতএব $A \cup B = B$.

$A \cap B = \{9, 10, 11, \ldots\ldots\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\ldots\}$

$= \{9, 10, 11, \ldots\ldots\} = A$

$A \subset B$, অতএব $A \cap B = A$

9. (i) $A = \{x \mid x + 8 = 8\} = \{0\}$, $B = \{x \mid x^2 = 9,\ 2x = 4\} = \phi$

$\therefore A - B = \{0\} - \phi = \{0\} = A$

(ii) $A = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$,

$B = \{x : x^2 - 11x + 24 = 0\} = \{3, 8\}$

$A \cap B = \{2, 3\} \cap \{3, 8\} = \{3\}$

$A - B = \{2, 3\} - \{3, 8\} = \{2\}$.

10. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \ldots\ldots\}$

$C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots\ldots\}$

$B \cap C = \{6, 12, 18, 24, \ldots\ldots\}$

$\therefore A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 6, 12, 18, \ldots\ldots\}$

$B \cup C = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots\ldots\}$

$\therefore A \cap (B \cup C) = \{2, 3\}$

11. (i) মনে করি $x \in A$, তবে $x \in A \cup B$

অর্থাৎ, $x \in A$ হলে, $x \in A \cup B$ $\therefore A \subset A \cup B$

অনুরূপভাবে, দেখান যায় যে, $B \subset A \cup B$

(ii) মনে করি $x \in A \cap B$, তবে $x \in A$ এবং $x \in B$.

অতএব, $x \in A \cap B$ হলে, $x \in A$ হয় $\therefore A \cap B \subset A$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় $A \cap B \subset B$.

(iii) মনে করি $x \in A - B$, তবে $x \in A, x \notin B$

দেখা যাচ্ছে, $x \in A - B$ হলে, $x \in A$ হবে।

অতএব, $A - B \subset A$.

12. (i) মনে করি, $x \in B - A$ তবে, $x \in B, x \notin A$

অতএব, $x \in A'$

আমরা পাচ্ছি $x \in B - A$ হলে $x \in A'$ হবে।

অতএব, $B - A \subset A'$

(ii) $B - A' = \{x \mid x \in B, x \notin A'\}$

$= \{x \mid x \in B, x \in A\}$

$= B \cap A$

13. (i) $A \subset B'$

$\Rightarrow x \in A$ হলে, $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A, x \notin B$

$\Rightarrow A \cap B = \phi$

(ii) $B \cap A' = B$

$\Rightarrow B \subset A'$

$\Rightarrow x \in B$ হলে, $x \in A'$

$\Rightarrow x \in B, x \notin A$

$\Rightarrow A \cap B = \phi$

(iii) $A \cup B' = B'$

$\Rightarrow A \subset B'$

$\Rightarrow x \in A$ হলে, $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A, x \notin B$

$\Rightarrow A \cap B = \phi$

14. (i) মনে করি, $x \in A \cap B$; $\Rightarrow x \in A, x \in B$

অতএব, $A \cap B \subset A$

আবার, মনে করি $x \in A \Rightarrow x \in B$ $[\because A \subset B]$

$\therefore x \in A \cap B$

আমরা পাচ্ছি $x \in A$ হলে, $x \in A \cap B$

অতএব, $A \subset A \cap B$

$\therefore A \cap B = A$, যদি $A \subset B$ হয়।

(ii) মনে করি $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ অথবা $x \in B$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$ $[\because A \subset B]$

$\therefore A \cup B \subset B$

আবার সংযোগ সেটের সংজ্ঞানুয়ায়ী $B \subset A \cup B$

$\therefore A \cup B = B$ যদি $A \subset B$ হয়।

(iii) মনে করি $A \subset B$

তবে, $x \in A$ হলে $x \in B$

$\Rightarrow$ $x \in A$ হলে $x \notin B'$

অতএব, A এবং B' নিশ্ছেদ সেট এবং $B' \cap A = \phi$

এখন, $B' = B' \cap U$ [U সার্বিক সেট]

$= B' \cap (A \cup A')$

$= (B' \cap A) \cup (B' \cap A')$ [চিঠি দর্শক]

$= \phi \cup (B' \cap A')$ [চিঠি কমতত্ত্ব]

$= B' \cap A'$ [চিঠি কমতত্ত্ব]

$\therefore B' \subset A'$ (প্রমাণিত)

(iv) $A \cup (B - A) = \{x \mid x \in A$ অথবা $x \in (B - A)\}$

$= \{x \mid x \in A$ অথবা $x \in B\}$

[কিন্তু শর্ত হচ্ছে $A \subset B$;

$\therefore x \in A$ হলে $x \in B$ হবে।]

$= \{x \mid x \in B\}$

$= B$

$\therefore A \cup (B - A) = B.$

15. $(B \cap C) \cup A = A \cup (B \cap C)$ [বিনিময় বিধি]

$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$ [বণ্টন বিধি]

$= (B \cup A) \cap (C \cup A)$ [বিনিময় বিধি]

16. $U \cap A' = A'$ [অভেদক বিধি] ... ... (i)

এখন $A \cup B = U$ [প্রদত্ত শর্ত]

$\therefore (A \cup B) \cap A' = A'$ [(i)-এ মান স্থাপন করে]

$\Rightarrow (A \cap A') \cup (B \cap A') = A'$ [বণ্টন বিধি]

$\Rightarrow \phi \cup (B \cap A') = A'$ [পূরক বিধি]

$\Rightarrow B \cap A' = A'$

$\therefore A' \subset B.$

17. (i) $A \cap (A' \cup B)$

$\Rightarrow (A \cap A') \cup (A \cap B)$ [বণ্টন বিধি]

$\Rightarrow \phi \cup (A \cap B)$ [পূরক বিধি]

$\Rightarrow A \cap B.$

(ii) আমরা জানি, $A \cap U = A$

$A \cup (A \cap B) \Rightarrow (A \cap U) \cup (A \cap B)$ [A-এর মান স্থাপন]

$\Rightarrow A \cap (U \cup B)$ [বণ্টন বিধি]

$\Rightarrow A \cap U$ [অভেদক বিধি]

$\Rightarrow A$ [অভেদক সূত্র]

(iii) $A \cap (A \cup B)$

$\Rightarrow (A \cup \phi) \cap (A \cup B)$

$\Rightarrow A \cup (\phi \cap B)$ [বণ্টন বিধি]

$\Rightarrow A \cup \phi$ [অভেদক বিধি]

$\Rightarrow A$ [অভেদক বিধি]

18. $B \cup C \ = \{2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{2, 3, 4\}$

$B \cap C \ = \{2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\}$

$\therefore A \times (B \cup C) = \{a, b\} \times \{2, 3, 4\}$

$= \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$

$A \times B = \{a, b\} \times \{2, 3\} = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3)\}$

$A \times C = \{a, b\} \times \{3, 4\} = \{(a, 3), (a, 4), (b, 3), (b, 4)\}$

$\therefore (A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3), (a, 4), (b, 4)\}$

অতএব, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

এখন $A \times (B \cap C) = \{a, b\} \times \{3\} = \{(a, 3), (b, 3)\}$

$(A \times B) \cap (A \times C)$

$= \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3)\} \cap \{(a, 3), (a, 4), (b, 3), (b, 4)\}$

$= \{(a, 3), (b, 3)\}$

অতএব, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

19. দুটোই সঠিক

$A \times A = (B \times B) \cap (C \times C) = (B \times C) \cap (C \times B)$

20. $\{(A \cup B) \cup (B \cup C) \cup (C \cup A)\}'$

$= \{(B \cup A) \cup (B \cup C) \cup (C \cup A)\}'$

$= [\{B \cup (A \cup C)\} \cup (C \cup A)]'$

$= [\{B \cup (C \cup A)\} \cup (C \cup A)]'$

$= \{B \cup (C \cup A) \cup (C \cup A)\}'$

$= (B \cup C \cup A)'$

$= B' \cap C' \cap A'$ [দ্য মইভারের সূত্র প্রয়োগ করে]

21. $A \cup B \cup C$

$= \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 4, 5, 6, 9\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

$\therefore \ n(A \cup B \cup C) = 8$

$A \cap B \cap C = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 6, 8\} \cap \{3, 4, 5, 6, 9\}$

$= \{4\}$

$\therefore n(A \cap B \cap C) = 1$

$n(A) = 4, n(B) = 4, n(C) = 5$

$\therefore n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

$= 4 + 4 + 5 - 2 - 2 - 2 + 1$

$= 8$

$= n(A \cup B \cup C)$

22. $A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4, 6\}$,

$A \times A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5) (1, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (5, 7), (7, 1), (7, 3), (7, 5), (7, 7)\}$

$\therefore n(A \times A) = 16$

$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (7, 2), (7, 4), (7, 6)\}$

$\therefore n(A \times B) = 12$

$B \times A = \{2, 4, 6\} \times \{1, 3, 5, 7\}$

$= \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (6, 1), (6, 3), (6, 5), (6, 7)\}$

$\therefore n(B \times A) = 12$

$B \times B = \{2, 4, 6, \} \times \{2, 4, 6\}$

$= \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

$\therefore n(B \times B) = 9$

23. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 17 + 28 - 14$

$= 31$

24. সমস্ত ছাত্রের সেট $= S$ $\quad \therefore n(S) = 50$

গণিতের ছাত্রের সেট $= M$ $\quad \therefore n(M) = 20$

জীববিজ্ঞানের ছাত্রের সেট $= Z$ $\quad \therefore n(Z) = 40$

$n(S) = n(M) + n(Z) - n(M \cap Z)$

$\Rightarrow 50 = 20 + 40 - n(M \cap Z)$

$\therefore n(M \cap Z) = 60 - 50$

$\Rightarrow n(M \cap Z) = 10$

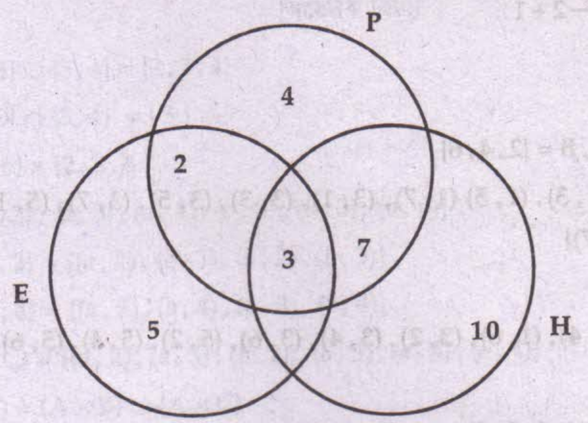
10 জন ছাত্র জীববিদ্যা এবং গণিত উভয় বিষয়ই গ্রহণ করেছে। সুতরাং শুধু গণিতের ছাত্রের সংখ্যা $= 20 - 10 =$ 10 জন।

25. মনে করি ইতিহাসের ছাত্রের সেট = H, $n(\text{H}) = 20$

পৌরবিজ্ঞানের ছাত্রের সেট = P, $n(\text{P}) = 16$

ও গার্হস্থ্য অর্থনীতির সেট = E, $n(\text{E}) = 10$

$n(\text{H}\cap\text{P}) = 10$, $n(\text{P}\cap\text{E}) = 5$ এবং $n(\text{H}\cap\text{P}\cap\text{E}) = 3$



ভেন চিত্র

ভেন চিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে

ইতিহাস, পৌরবিজ্ঞান ও গার্হস্থ্য অর্থনীতির ছাত্র সংখ্যা = 3

ইতিহাস ও পৌরবিজ্ঞানের ছাত্র সংখ্যা = 7

শুধু ইতিহাসের ছাত্র সংখ্যা = 10

পৌরবিজ্ঞান ও গার্হস্থ্য অর্থনীতির ছাত্র সংখ্যা = 2

শুধু পৌরবিজ্ঞানের ছাত্র সংখ্যা = 4

শুধু গার্হস্থ্য অর্থনীতির ছাত্র সংখ্যা = 5

সুতরাং এক বা একাধিক বিষয়ের মোট ছাত্র সংখ্যা = $3 + 7 + 10 + 2 + 4 + 5 = 31$ জন।

26. সকল শিক্ষার্থীর সেট = S, $n(\text{S}) = 50$

বাস্কেট বলে অংশগ্রহণকারীর সেট = B, $n(\text{B}) = 25$

ফুটবলে অংশগ্রহণকারী ছাত্রের সেট = F, $n(\text{F}) = 15$

সাঁতারে অংশগ্রহণকারী শিক্ষার্থীর সেট = M, $n(\text{M}) = 25$

বাস্কেটবল ও ফুটবলে অংশগ্রহণকারী = $n(\text{B}\cap\text{F}) = 4$

ফুটবল এবং সাঁতারে অংশগ্রহণকারীর সংখ্যা = $n(\text{F}\cap\text{M}) = 10$

বাস্কেট বল এবং সাঁতারে অংশগ্রহণকারী ছাত্র = $n(\text{B}\cap\text{M}) = 8$

তিনটি খেলাতেই অংশগ্রহণকারীর সংখ্যা = $n(\text{B}\cap\text{F}\cap\text{M}) = 3$

$\therefore n(S) = n(B) + n(F) + n(M) - n(B \cap F) - n(F \cap M)$

$- n(B \cap M) + n(B \cap F \cap M)$

$= 25 + 15 + 25 - 4 - 10 - 8 + 3$

$= 68 - 22$

$= 46$

কিন্তু, $n(S) = 50$

অতএব, রিপোর্টারের গণনায় ভুল ছিল।

প্রশ্নমালা I B

1. ক্রমজোড়গুলোর প্রতিটিতেই প্রথম উপাদান দ্বিতীয় উপাদানের থেকে ক্ষুদ্রতর। অতএব,

$S = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$

2. $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots \ldots \ldots\}$

$2x + y = 10, x \in N, y \in N$

ক্রমজোড়গুলোতে কেবল স্বাভাবিক সংখ্যাগুলোই বিবেচনায় আনতে হবে। স্বাভাবিক সংখ্যাসেট N অনন্ত সেট (Infinite set) হলেও প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে গঠিত ক্রমজোড়গুলো (1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)।

$x = 5$ হলে, $y = 0$ কিন্তু $0 \notin N$; অতএব, আর কোন ক্রমজোড় পাওয়া যাবে না। অতএব,

$S = \{(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)\}$

S-এর ডোমেন $\{1, 2, 3, 4\}$ এবং রেঞ্জ $\{8, 6, 4, 2\}$

3. $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots \ldots \ldots\}$

$x + 3y = 12, \ x \in N, \ y \in N$

ক্রমজোড়গুলোতে কেবল স্বাভাবিক সংখ্যাগুলোই বিবেচনায় আনতে হবে। স্বাভাবিক সংখ্যা সেট N অনন্ত সেট হলেও শর্ত পূরণ করে গঠিত ক্রমজোড়গুলো (3, 3), (6, 2), (9, 1)।

মনে করি $x = 2$ সেক্ষেত্রে $y = \frac{10}{3}$ কিন্তু $\frac{10}{3} \notin N$। এভাবে দেখানো যায় উপরে উল্লেখিত 3টি ক্রমজোড়ই প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে গঠন করা যাবে।

$\therefore \ F = \{(3, 3), (6, 2), (9, 1)\}$

F-এর ডোমেন $\{3, 6, 9\}$ এবং রেঞ্জ $\{3, 2, 1\}$

$F^{-1} = \{(3, 3), (2, 6), (1, 9)\}$

লক্ষণীয় যে F^{-1}-এর ডোমেন F-এর রেঞ্জ এবং F^{-1}-এর রেঞ্জ F-এর ডোমেন।